



Prof. Dr. H.-D. Donder

Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011

6. Januar 2011

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Tutorium 10

Aufgabe 1: Sei $r > 0$, $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$ und

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Berechnen Sie $\int_{\gamma} \omega$.

Aufgabe 2: Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $x \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten df als 1-Form und f' als Vektorfeld. Was ist $df(x)(f'(x))$?

Aufgabe 3: Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Besitzt die 1-Form $f df$ eine Stammfunktion?

Aufgabe 4: Bestimmen Sie eine Stammfunktion von:

$$\omega = (\sin(xy) + xy \cos(xy)) dx + x^2 \cos(xy) dy$$



Prof. Dr. H.-D. Donner

Parmenides García Cornejo, Andreas Fackler

Wintersemester 2010/2011

18. Januar 2011

Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen

Lösungsskizze zu Tutorium 10

Aufgabe 1:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \omega &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t)} \gamma_1'(t) + \frac{\gamma_1(t)}{\gamma_1^2(t) + \gamma_2^2(t)} \gamma_2'(t) \right) dt \\&= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{-r \sin(t)}{r^2 \cos^2(t) + r^2 \sin^2(t)} r \sin(t) + \frac{r \cos(t)}{r^2 \cos^2(t) + r^2 \sin^2(t)} r \cos(t) \right) dt \\&= \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt = 2\pi\end{aligned}$$

Aufgabe 2:

$$\begin{aligned}df(x)(f'(x)) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \lambda_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \lambda_n \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \\&= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)^2 = \|f'\|^2\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Falls die 1-Form eine Stammfunktion F besitzt, so muss für F gelten:

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{\gamma_x} f df = \int_0^1 f(\gamma_x(t)) df(\gamma_x(t)) \gamma_x'(t) dt = \int_0^1 f(xt) df(xt) x dt \\&= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n f(xt) \frac{\partial f}{\partial x_k}(xt) x_k \right) dt = \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{f^2(xt)}{2} \right) dt = \frac{f^2(x)}{2}\end{aligned}$$

Tatsächlich ist:

$$dF(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{f^2(x)}{2} dx_k = \sum_{k=1}^n f(x) \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) dx_k = f(x) \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) dx_k = f(x) df(x)$$

Aufgabe 4: Wieder nehmen wir zunächst an, es gebe eine Stammfunktion $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, und berechnen ihren Wert in (x, y) , indem wir von $(0, 0)$ nach (x, y) integrieren. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $F(0, 0) = 0$ annehmen. Der Einfachheit halber

integrieren wir nicht auf geradem Wege, sondern erst entlang der x -Achse und dann parallel zur y -Achse, also entlang den Wegen $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \gamma_x(t) = (xt, 0)$ und $\delta_{x,y} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \delta_{x,y}(t) = (x, yt)$:

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= \int_{\gamma_{x,0}} (\sin(uv) + uv \cos(uv)) \, du + u^2 \cos(uv) \, dv = \int_0^1 0 \, dt = 0 \\ F(x, y) &= F(0, 0) + \int_{\gamma_x} \omega + \int_{\delta_{x,y}} \omega \\ &= 0 + \int_0^1 0 \, dt + \int_0^1 ((\sin(xyt) + xyt \cos(xyt))0 + x^2 \cos(xyt)y) \, dt \\ &= \int_0^1 x^2 y \cos(xyt) \, dt = x \sin(xyt) \Big|_0^1 = x \sin(xy) \end{aligned}$$

Tatsächlich ist dies eine Stammfunktion von ω , denn $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \sin(xy) + xy \cos(xy)$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = x^2 \cos(xy)$.